LISTA 4 – FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH: DZIEDZINA, GRANICA I CIĄGŁOŚĆ

1. Wyznaczyć i naszkicować na płaszczyźnie dziedzinę funkcji:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}}$,
   (b) $f(x,y) = \frac{1}{16-x^2-y^2}$,
   (c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$,
   (d) $f(x,y) = \arcsin\frac{y-1}{x}$,
   (e) $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$,
   (f) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2. Wyznaczyć cięcia wykresu poniższych funkcji płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = c$, $c \in \mathbb{R}$ oraz naszkicować ich wykresy.

   (a) $z = 2 - x^2 - y^2$,
   (b) $z = y^2$,
   (c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$,
   (d) $z = 2x - 3y + 1$,
   (e) $z = 1 + 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Wyznaczyć, jeśli istnieje, granicę ciągu:

   (a) $\left(\left(1 - \frac{7}{n}\right)^n, \sin\frac{\pi}{n}\right)$,
   (b) $\left(\operatorname{arctg}\frac{n^2}{n+1}, \frac{\cos n}{n^3}, \sqrt[n]{3}\right)$,
   (c) $\left(\sqrt[n]{n^n + 5}, \frac{n-3}{n}\right)$,
   (d) $\left(0, n\sin\frac{1}{n}, \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

4. Obliczyć granice

   (a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-x^2y+3y}{x^3+y^2}$,
   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^3-y^3}$,
   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$,
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$,
   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$,
   (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$,
   (g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$,
   (h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$,
   (i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$,
   (j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$,
   (k) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,
   (l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^6}$,
   (m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

5. Zbadać ciągłość funkcji określonej wzorem

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x = y = 0 \end{cases}$,
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x = y = 0 \end{cases}$.

6. Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \sin x, & y \geq 0 \\ 1, & y < 0 \end{cases}$,
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 < 1 \\ 1, & x^2 + y^2 = 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$.